Chapitre 1
Raisonnement par récurrence

Liste des exercices à travailler : 13, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 25

1. Principe de récurrence

a) Énoncé

Proposition 1

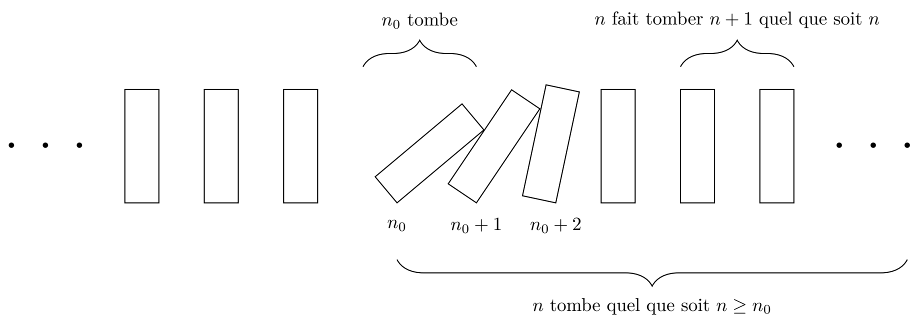
Principe de récurrence
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n. Supposons que les deux conditions suivantes sont remplies :

- Il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
- Pour tout $n \geq n_0$, on a $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geq n_0$.

Remarque

Le principe de récurrence fonctionne comme un jeu de dominos : si chaque domino fait tomber le suivant, et que le domino n_0 tombe, alors tous les dominos après le domino n_0 tomberont.



Le raisonnement par récurrence se rédige donc en trois étapes :

- **Initialisation** : On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$ quelconque et on montre que cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

  On peut écrire

  - « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$... »
  - « Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai... »
  - « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$... »
  - etc.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque

En général l'initialisation se fait pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$ mais cela peut être un autre entier, tout dépend du contexte.

b) Exemples

Application 1

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq n^2$
2. En déduire la limite de la suite (u_n)

Solution :

1. *Pour tout entier naturel n on pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq n^2$ » et on raisonne par récurrence :*
   - ***Initialisation :*** *$1^2 = 1$ et $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 0^2$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
   - ***Hérédité :*** *On suppose que $u_n \geq n^2$ pour un certain rang n.*
     Alors $u_n + 2n + 1 \geq n^2 + 2n + 1$, donc $u_n + 2n + 1 \geq (n+1)^2$ (on reconnait une identité remarquable).
     On a donc $u_{n+1} \geq (n+1)^2$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - ***Conclusion :*** *par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$*
2. *Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

Application 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 50$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 20$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 100$
2. En déduire les variations de la suite u_n
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite finie ℓ.

Solution :

1. *On raisonne par récurrence, pour tout entier naturel n on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 100$*
   - ***Initialisation :*** *$u_0 = 50$ donc $0 \leq u_0 \leq 100$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
   - ***Hérédité :*** *Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire tel que $0 \leq u_n \leq 100$.*
     Alors,
     $$0 \leq 0,8u_n \leq 80$$
     $$0 \leq 20 \leq 0,8u_n + 20 \leq 100$$
     $$0 \leq u_{n+1} \leq 100$$
     donc $0 \leq u_{n+1} \leq 100$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - ***Conclusion*** *: Par principe de récurrence, on en conclut que $0 \leq u_n \leq 100$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Pour étudier les variations de (u_n), il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,8u_n + 20 - u_n \\ &= 20 - 0,2u_n \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1, $0 \leq u_n \leq 100$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donc

$$0 \leq 0,2u_n \leq 20$$
$$0 \geq -0,2u_n \geq -20$$
$$20 \geq 20 - 0,2u_n \geq 0$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

3.

Rappel

Définition

- *On dit qu'une suite (u_n) est* ***majorée*** *s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit qu'une suite (u_n) est* ***minorée*** *s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit qu'une suite (u_n) est* **bornée** *s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ et un réel $M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq u_n \leq M$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.*

Rappel

Propriété *Une suite croissante et majorée converge vers un réel ℓ.*
Attention : *le majorant n'est pas forcément égal à la limite.*

(u_n) est croissante d'après la question 2. et majorée par 100 d'après la question 1. Elle converge donc vers une limite finie ℓ.

Application 3

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

Rappel

Un entier $n \in \mathbb{N}$ est un multiple de 3 si n peut s'écrire $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Solution :

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $4^n + 2$ est un multiple de 3 »

- ***Initialisation :*** $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ *est un multiple de 3, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
- ***Hérédité :*** *On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que $4^n + 2$ est un multiple de 3.*
  Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n + 2 = 3k$.
  En multipliant par 4 cette égalité, on obtient
  $$\begin{aligned} 4^{n+1} + 8 &= 12k \\ 4^{n+1} + 2 &= 12k - 6 \\ 4^{n+1} + 2 &= 3(4k - 2) \end{aligned}$$
  en posant $k' = 4k - 2$, on a $k' \in \mathbb{N}$ et $4^{n+1} + 2 = 3k'$ donc par définition $4^{n+1} + 2$ est un multiple de 3. On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ était vraie.
- ***Conclusion :*** *Par principe de récurrence, on en conclut que $4^n + 2$ est un multiple de 3 quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

c) Applications

Une formule

Proposition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Autrement dit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

Démonstration : On peut démontrer cette formule par récurrence. On veut montrer la formule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc on initialise à $n=1$.
On note pour tout entier n, $\mathcal{P}(n)\ :\ 1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

- ***Initialisation :*** $\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$ *donc la formule est vraie pour $n=1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.*
- ***Hérédité :*** *On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire que*

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{2}$$

On part de l'égalité (1) qu'on a supposé vraie, et on ajoute $(n+1)$ de chaque côté. On obtient

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\1+2+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)+2n+2}{2}\\1+2+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n^2+3n+2}{2}\end{aligned} \tag{3}$$

Si on développe le membre de gauche de l'égalité (2), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)}{2}&=\frac{n^2+2n+n+2}{2}\\&=\frac{n^2+3n+2}{2}\end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi, en combinant les égalités (3) et (4) on a bien

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- ***Conclusion :*** *Par principe de récurrence, on en conclut que $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$*

□

Une autre formule

Proposition 3

Pour tout réel $q \neq 1$, on a

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Autrement dit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}$$

Démonstration : Soit $q \neq 1$ un réel, on note $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ et on raisonne par récurrence :

- ***Initialisation :*** *$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$ d'une part, et $\dfrac{q^{0+1} - 1}{q - 1} = \dfrac{q - 1}{q - 1} = 1$ d'autre part, donc $\sum_{k=0}^{0} q^k = \dfrac{q^{0+1} - 1}{q - 1}$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$*
- ***Hérédité :*** *Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. Alors*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k \\
&= q^{n+1} + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(q-1)q^{n+1} + q^{n+1} - 1}{q - 1} \\
&= \frac{q^{n+2} - q^{n+1} + q^{n+1} - 1}{q - 1} \\
&= \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- ***Conclusion :*** *par principe de récurrence, on en conclut que l'égalité $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.*

□

Exercice 1

En complément, on peut donner les deux formules suivantes à démontrer par récurrence (exercice pour le lecteur)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Autrement dit

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Un lemme

Lemme 1

Soit a un réel strictement positif. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Démonstration : On pose $\mathcal{P}(n)$: $(1+a)^n \geq 1+na$ et on raisonne par récurrence :

- ***Initialisation :*** *$(1+a)^0 = 1$ d'une part, et $1+0\times a = 1$ d'autre part, donc on a bien $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
- ***Hérédité :*** *Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ on ait $(1+a)^n \geq 1+na$.*
  Alors, en multipliant par $1+a$ de chaque côté, on obtient

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) \quad \text{car } 1+a>0$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+\underbrace{na^2}_{\geqslant 0} \geq 1+(n+1)a$$

  donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$, ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ***Conclusion :*** *Par principe de récurrence, on en conclut que quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geq 1+na$.*

$\square$

On déduit de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 4

Soit q un nombre réel.

- Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Démonstration : Le lemme permet de démontrer le cas $q>1$: il suffit de poser $a = q-1>0$, alors $q = 1+a$ et $q^n = (1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$ on a, par comparaison de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
Pour la limite dans le cas $0<q<1$, il suffit de poser $Q = \dfrac{1}{q}$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n = +\infty$, et comme $q^n = \dfrac{1}{Q^n}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ par inverse de limite.

$\square$

2. Récurrence double, récurrence forte

Deux variantes du principe de récurrence dont l'hérédité ne repose pas seulement sur le rang précédent mais sur les **deux rangs précédents**, ou bien sur **l'ensemble de tous les rangs précédents**

Proposition 5

Principe de récurrence double
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n. Supposons que les deux conditions suivantes sont remplies :

- Il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.

- Pour tout $n \geq n_0$, on a $(\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geq n_0$.

Le raisonnement par récurrence double se rédige en trois étapes :

- **Initialisation** : On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies pour un entier $n \geq n_0$ quelconque et on montre que cela implique que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence double, on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Application 4

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 12, \quad u_{n+2} = 12u_{n+1} - 35u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 5^n + 7^n$

Solution :

On note $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n = 5^n + 7^n$

- ***Initialisation :*** *On a* $5^0 + 7^0 = 2 = u_0$ *et* $5^1 + 7^1 = 12 = u_1$, *donc* $\mathcal{P}(0)$ *et* $\mathcal{P}(1)$ *sont vraies.*
- ***Hérédité :*** *Supposons qu'il existe un entier* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{P}(n)$ *et* $\mathcal{P}(n+1)$ *soient vraies, c'est à dire que*

$$u_n = 5^n + 7^n \quad \textit{et} \quad u_{n+1} = 5^{n+1} + 7^{n+1}$$

Alors, par définition de la suite (u_n), *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 12 \times (5^{n+1} + 7^{n+1}) - 35 \times (5^n + 7^n) \\ &= 5^n(12 \times 5 - 35) + 7^n(12 \times 7 - 35) \\ &= 5^n \times 25 + 7^n \times 49 \\ &= 5^{n+2} + 7^{n+2} \end{aligned}$$

- ***Conclusion :*** *par principe de récurrence double, on en conclut que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n = 5^n + 7^n$.

Application 5

La suite de Fibonacci (F_n) est une suite récurrente d'ordre 2 définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n < \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

Solution :

On note $\mathcal{P}(n)\ :\ F_n < \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

- ***Initialisation :*** *On a* $\left(\dfrac{5}{3}\right)^0 = 1$ *et* $\left(\dfrac{5}{3}\right)^1 = \dfrac{5}{3}$.

  Comme $F_0 = 0 < 1$ *et* $F_1 = 1 < \dfrac{5}{3}$, $\mathcal{P}(0)$ *et* $\mathcal{P}(1)$ *sont vraies.*
- ***Hérédité :*** *Supposons qu'il existe un certain* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{P}(n)$ *et* $\mathcal{P}(n+1)$ *soient vraies, c'est à dire que*

$$F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad et \quad F_{n+1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$$

Alors

$$F_{n+2} < \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$$

$$F_{n+2} < \frac{5^n \times 3^2}{3^n \times 3^2} + \frac{5^{n+1} \times 3}{3^{n+1} \times 3}$$

$$F_{n+2} < \frac{9 \times 5^n + 3 \times 5^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$F_{n+2} < \frac{24 \times 5^n}{3^{n+2}} < \frac{25 \times 5^n}{3^{n+2}}$$

$$F_{n+2} < \frac{5^{n+2}}{3^{n+2}}$$

Proposition 6

Principe de récurrence forte
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n. Supposons que les deux conditions suivantes sont remplies :

- Il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
- Pour tout $n \geq n_0$, on a $(\forall k,\ n_0 \leq k \leq n,\ \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geq n_0$.

Le raisonnement par récurrence forte se rédige en trois étapes :

- **Initialisation** : On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies pour un entier $n \geq n_0$ quelconque et on montre que cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence forte, on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Application de la récurrence forte : un théorème sur les nombres premiers

Théorème 1

Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Démonstration : On note $\mathcal{P}(n)$: « n admet un diviseur premier »et on raisonne par principe de récurrence forte.

- ***Initialisation :*** *2 est un nombre premier et 2 divise 2 donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.*
- ***Hérédité :*** *Supposons que pour un entier n tous les nombres entiers entre 2 et n admettent un diviseur premier.*
  Considérons maintenant le nombre $n+1$: soit ce nombre est premier, soit il ne l'est pas.
  S'il est premier, il admet un diviseur premier : lui-même.
  S'il n'est pas premier, par définition il peut s'écrire comme produit de deux entiers $n+1 = a \times b$, avec $a < n+1$ et $b < n+1$. Par hypothèse de récurrence forte, a et b admettent tous deux au moins un diviseur premier, donc $n+1$ aussi. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ***Conclusion :*** *Par principe de récurrence forte on en conclut que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.*

$\square$

Application 6

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Solution :

On note $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n = 2^{n-1}$ *et on raisonne par récurrence :*

- ***Initialisation :*** $2^{1-1} = 1$ *et* $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1$ *donc* $\mathcal{P}(1)$ *est vraie.*
- ***Hérédité :*** *Supposons que* $\mathcal{P}(k)$ *soit vraie pour tout entier* $1 \leq k \leq n$*, c'est à dire que* $u_k = 2^{k-1}$*.*
  Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*
- ***Conclusion :*** *par principe de récurrence forte, on en conclut que* $u_n = 2^{n-1}$ *quel que soit l'entier* $n \geq 1$*.*

Remarque

Dans l'exemple précédent la propriété n'est pas vraie pour le rang $n = 0$, on initialise donc à $n = 1$.